第 39 卷　第 4 期
2021 年 12 月

天　文　学　进　展
PROGRESS IN ASTRONOMY

Vol. 39,　No. 4
Dec., 2021

doi: 10.3969/j.issn.1000-8349.2021.04.08

检测钱德勒摆动周期和 Q 值的一种新方法

胥灿灿[1,3]，方　明[2]，许雪晴[1,4]，周永宏[1,3,4]，段鹏硕[1,4]

(1. 中国科学院 上海天文台，上海 200030；2. 麻省理工学院 地球、大气和行星科学系，美国 02139；3. 中国科学院大学 天文与空间科学学院，北京 100049；4. 中国科学院 行星科学重点实验室，上海 200030)

摘要： 基于经典极移理论，创新性地提出了一种估计地球钱德勒摆动 (Chandler wobble) 周期和品质因子的数学模型和快速算法，该方法对模型误差的假设较弱，估计结果的统计性质更优。采用 1993 年 1 月－2009 年 12 月时间段内的极移观测序列和大气、海洋角动量数据，新方法对钱德勒摆动周期和品质因子的点估计分别为 (430.8 ± 0.50) d 和 62.6 ± 9.63，与最新研究结果接近；与之对应的 90% 置信区间分别为 (430.0, 431.6) d 和 (43.5, 75.7)，这一极窄的置信区间提高了点估计结果的可靠性，有助于更加精确地认识地球钱德勒摆动的激发和维持机理。

关　键　词： 地球自转变化；极移理论；角动量；优化算法；自助法

中图分类号： P127.1　　　**文献标识码：** A

1　引　言

钱德勒摆动是地球自转的一个本征模。自 1891 年首次被发现以来，引起钱德勒摆动的物理机制和描述它的两个关键参数 (周期和品质因子) 一直是科学界关注的热点问题。空间大地测量技术为检测钱德勒摆动提供了丰富、高精度和高时空分辨率的观测资料，人们利用这些高精度的观测资料，在引起钱德勒摆动的物理机制有关领域的研究取得了很大进展，例如 Smith 和 Dahlen[1]、朱耀仲[2−4]、Mathews 等人[5]，以及 Chen 等人[6,7] 在理论上阐述了各种地球物理因素 (如海洋、地幔粘弹性、核幔耦合等) 对钱德勒摆动的贡献；Wahr[8]、Eubanks[9]、Barnes 等人[10]、Gross[11,12]、Liao 等人[13]，以及 Fang 等人[14]研究了大气、海洋等地表流体激发钱德勒摆动的物理机制。尽管如此，由于理论假设的局限性[6]、部分观测数据的不确定性[15]，以及观测数据的不完备性[8]等原因，到目前为止，引起钱德勒摆动的物理机制，摆动周期和品质因子的取值也一直没有明确的结论[16]。

收稿日期： 2021-02-09；　**修回日期：** 2021-03-21

资助项目： 国家自然科学基金 (11673049，11773057，11803064，41774017)；中国科学院青年创新促进会项目 (2019265)

通讯作者： 许雪晴，xqxu@shao.ac.cn

由于钱德勒摆动与很多地球物理因素有关，因此，对其精确的检测具有很重要的科学价值。目前，关于钱德勒摆动周期和品质因子的计算和估计方法主要分为如下四类：

(1) 谱分析方法。直接对极移观测序列进行谱分析，从而获得钱德勒摆动周期和品质因子[17−19]。

(2) 随机激发假设方法。假设钱德勒摆动的激发机制是随机的，采用统计方法来估计钱德勒摆动周期和品质因子[20−24]。

(3) 地球物理激发理论方法。采用实际观测数据，研究大气、海洋以及陆地水等地球物理机制对钱德勒摆动的影响[16,25−28]。

(4) 半解析方法。基于一定的理论模型和实际观测资料，例如海洋、地幔、核幔耦合和三轴椭球等等，给出钱德勒摆动周期和品质因子的解析表达式[1,2−5,29]。

本文将前三类方法获得的周期和品质因子称之为观测值，将最后一类方法获得的称之为理论值。表 1 统计了现有方法对钱德勒摆动周期和品质因子的计算和估计结果。从表 1 可以看出，品质因子的参数估值具有极大的取值范围 (36, 1 000)，尽管最新研究已经将其置信区间缩小至 (56, 255)[16]，但仍然比较大。

表 1 钱德勒摆动周期和品质因子的点估计和区间估计的现有结论①

方法	周期/太阳日	品质因子	置信度②	时间跨度/a	参考文献
谱分析法	429.73±7.09	—	—	80	[17]
	432.71±0.42	36.7	—	61	[18]
	434±0.5	—	—	106	[19]
随机激发假设	433.2±3.4	61 (37, 193)	1σ	68	[20]
	434.8±2.0	96 (50, 300)	1σ	76	[21]
	433.3±3.1	170 (47, 1 000)	1σ	78	[22]
	433.0±1.1	179 (74, 789)	1σ	86	[23]
	433.1±1.7	—	—	147	[24]
地球物理激发理论	439.5±2.1	72 (30, 500)	90%	9	[26]
	433.7±1.8	49 (35, 100)	1σ	11	[25]
	429.4	107	—	10	[27]
	432.98	97	—	60	[28]
	430.9±0.7	127 (56, 255)	95%	25	[16]
	430.8±0.50	62.6 (43.5, 75.7)	90%	17	本工作
半解析法	426.7±2.6	—	—	—	[1]
	434.8	71	—	—	[3, 4]
	430.3	88.4	—	20	[5]
	433.03	100.20	—	20	[29]

注：① 该表格参考了 Gross[12] 的表 12 和 Nastula 等人[16] 的表 2，并引用了更多文献；② 这一列表示品质因子的置信水平，其中 1σ 表示单位标准差置信区间[25,27]。

在前人工作基础上，本文创新性地提出了一种用于估计钱德勒摆动周期和品质因子的数学模型和快速算法。新方法对模型误差的假设更弱，估计结果的统计性质更优，新方法还

采用了机制明确的优化算法，计算效率更高。

2 极移理论

假设地球不受外部天体的引力作用，在地固坐标系下，角动量定理可以写成刘维尔方程，即：

$$\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{L} = 0 \quad , \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{\omega}$ 是地固系相对惯性系的转动角速度。用 Ω 表示地球自转的平均角速度，则 $\boldsymbol{\omega}$ 可以进一步表示为：

$$\boldsymbol{\omega} = \Omega(m_1, m_2, 1 + m_3) \quad . \tag{2}$$

$\boldsymbol{L}$ 是地球自转角动量，在地固系下，其表达式是

$$\boldsymbol{L} = \overleftrightarrow{\boldsymbol{I}} \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{h} \quad , \tag{3}$$

其中，$\boldsymbol{h} = (h_1, h_2, h_3)^{\mathrm{T}}$ 是地球的相对角动量；$\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}$ 是地球的惯性张量，它的表达式为

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta I_{11} & \Delta I_{12} & \Delta I_{13} \\ \Delta I_{12} & \Delta I_{22} & \Delta I_{23} \\ \Delta I_{13} & \Delta I_{23} & \Delta I_{33} \end{pmatrix} \quad , \tag{4}$$

其中，A 和 C 是地球的主惯性矩。将 $\mathrm{diag}(A, A, C)$ 作为 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}$ 的初始值或无摄动项，则上式第二部分代表的就是 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}$ 的摄动，它是随时间变化的。

根据 Wahr[8] 的公式 (2.17), (2.21) 和 (2.24)，可知极移 $m(t)$ 与激发函数 $\psi(t)$ 满足如下微分方程：

$$\frac{\mathrm{i}}{\sigma_{\mathrm{cw}}} \dot{m}(t) + m(t) = \mathrm{i} \frac{C - A}{A_{\mathrm{m}}} \frac{\Omega}{\sigma_{\mathrm{cw}}} \psi(t) \quad , \tag{5}$$

其中，A_{m} 是地幔的主惯性矩，A 与 A_{m} 的关系为 $A = 1.128\,43 A_{\mathrm{m}}$ 或 $A = 1.129 A_{\mathrm{m}}$[8,30]；σ_{cw} 是钱德勒频率，在这里它只是一个实数；$m(t)$ 的表达式为 $m(t) = m_1(t) + \mathrm{i}m_2(t)$；$\psi(t)$ 的表达式为 $\psi(t) = \dfrac{1}{\mathrm{i}\Omega^2(C - A)}(\Omega \Pi(t) - \mathrm{i}\dot{\Pi}(t))$，其中 $\Pi(t)$ 是包含了大气、海洋等因素的角动量，它的表达式为：

$$\Pi(t) = h(t) + \Omega \Delta I(t) \quad , \tag{6}$$

其中，$h(t) = h_1(t) + \mathrm{i}h_2(t)$，即相对角动量，由于它与物质相对于地固系的运动速度有关，所以又称之为运动项；$\Delta I(t) = \Delta I_{13}(t) + \mathrm{i}\Delta I_{23}(t)$，即地球惯性张量的摄动，由于它只与物质的密度分布有关，所以又将 $\Omega \Delta I(t)$ 称之为质量项。

考虑地幔的滞弹性和海洋的非平衡响应，可以先将式 (5) 中的实数 σ_{cw} 替换为复数 $\sigma_{\mathrm{c}} = \dfrac{2\pi}{T_{\mathrm{c}}}\left(1 + \dfrac{\mathrm{i}}{2Q_{\mathrm{c}}}\right)$，其中 T_{c} 和 Q_{c} 分别代表钱德勒摆动周期和品质因子，再对其化简，结

果为

$$\dot{m}(t)-\mathrm{i}\sigma_{\mathrm{c}}m(t)=-\frac{\mathrm{i}}{A_{\mathrm{m}}}\left(\varPi(t)-\frac{\mathrm{i}}{\varOmega}\dot{\varPi}(t)\right)\quad . \tag{7}$$

这里对式 (7) 做一点说明，传统处理方法是先对式 (5) 化简，再将其中的 σ_{cw} 替换为 σ_{c}，即先化简再替换，如文献 [31] 中的式 (13) 和 (14)，而本工作则是先替换再化简。由于这两种处理方法对 $m(t)$ 的影响不超过 1%[8]，并且观测数据的测量精度有限，所以可以认为这两种做法一致。考虑极移 $m(t)$ 与观测极移 $p(t)$ 的关系，可得[31]：

$$m(t)=p(t)-\frac{\mathrm{i}}{\varOmega}\dot{p}(t)\quad , \tag{8}$$

其中，$p(t)=x(t)-\mathrm{i}y(t)$，$x(t)$ 和 $y(t)$ 就是由国际地球自转服务 (International Earth Rotation and Reference Systems Service, IERS) 或其他组织和机构提供的极移观测序列，其中 $y(t)$ 以指向 90° W 为正。将式 (8) 代入到式 (7) 中，可得

$$\dot{p}(t)-\mathrm{i}\sigma_{\mathrm{c}}p(t)=-\frac{\mathrm{i}}{A_{\mathrm{m}}}\varPi(t)\quad . \tag{9}$$

对这个微分方程进行求解，其中 $p(t)$ 的自由项在经过很长一段时间后逐渐衰减消失，只剩下受迫激发项，因此 $p(t)$ 的解析表达式为：

$$p(t)=-\frac{\mathrm{i}}{A_{\mathrm{m}}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma_{\mathrm{c}}t}\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma_{\mathrm{c}}\tau}\varPi(\tau)\mathrm{d}\tau\quad . \tag{10}$$

3　估计算法

基于式 (10)，本章对误差进行基本假设，提出用于估计 T_{c} 和 Q_{c} 的数学模型；同时，基于这些误差假设和新的数学模型，引入 T_{c} 和 Q_{c} 的区间估计方法——自助法。

3.1　估计 T_{c} 和 Q_{c} 的快速算法

假设数据是等间隔采样的，采样间隔为 δt，数据长度为 N，初始历元为 t_0。根据式 (10) 可以给出离散数据满足如下一阶自回归形式：

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma_{\mathrm{c}}h}p(t_{n+1})-p(t_n)=-\frac{\mathrm{i}}{A_{\mathrm{m}}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma_{\mathrm{c}}t_n}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma_{\mathrm{c}}\tau}\varPi(\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$(t_n=t_0+n\delta t\quad ,\quad n=0,1,2\cdots,N-1)\quad . \tag{11}$$

考虑到 $\varPi(t)$ 不完全是大气和海洋的角动量，可能还包含了不可观测的和未知的因素，如在式 (6) 的 $h(t)$ 和 $\Delta I(t)$ 中，它们不仅包含了地表流体的作用，还包括了地球内部的作用 (如地磁急变[19])，而后者不可直接观测[8]。所以，可以将 $\varPi(t)$ 分解为如下三个部分：

$$\varPi(t)=\varPi_{\mathrm{obv}}(t)+\varPi_{\mathrm{err}}(t)+\varPi_{\mathrm{res}}(t)\quad , \tag{12}$$

其中，$\varPi_{\mathrm{obv}}(t)+\varPi_{\mathrm{err}}(t)$ 是可观测部分的真值，$\varPi_{\mathrm{obv}}(t)$ 是与之对应的实际观测数据，$\varPi_{\mathrm{err}}(t)$ 是观测数据的测量误差 (即观测误差)；$\varPi_{\mathrm{res}}(t)$ 是上面提到的其他不可观测的或未知的激发

源。这里将式 (12) 的后两项合并，记为 $\Pi_{\rm mer}(t)$，简称模型误差。最后，假设模型误差对应的离散序列 $\Pi_{\rm mer}(t_n)$ 是一个均值函数为 0、一阶自相关函数为 0 的随机噪声。

将 $\Pi(t)=\Pi_{\rm obv}(t)+\Pi_{\rm mer}(t)$ 代入式 (11) 中，对关于 $\Pi_{\rm obv}(t)$ 的积分用辛普森公式展开，而对关于$\Pi_{\rm mer}(t)$ 的积分用梯形公式展开，并引入以下表达式：

$$\begin{cases} \beta_1=\exp(-{\rm i}\delta t\sigma_{\rm c}/2) \\ \beta_2=\exp(-{\rm i}\delta t\sigma_{\rm c}) \\ \varepsilon_n=\dfrac{{\rm i}\delta t}{2A_{\rm m}}\Pi_{\rm mer}(t_n) \end{cases} , \tag{13}$$

$$\begin{cases} X_{n,1}=\dfrac{2{\rm i}\delta t}{3A_{\rm m}}\Pi_{\rm obv}(t_{n+0.5}) \\ X_{n,2}=p(t_{n+1})+\dfrac{{\rm i}\delta t}{6A_{\rm m}}\Pi_{\rm obv}(t_{n+1}) \\ Y_n=p(t_n)-\dfrac{{\rm i}\delta t}{6A_{\rm m}}\Pi_{\rm obv}(t_n) \end{cases} . \tag{14}$$

利用式 (13) 和 (14) 将式 (11) 展开并化简为：

$$Y_n-X_{n,1}\beta_1-X_{n,2}\beta_2=\varepsilon_n+\varepsilon_{n+1}\beta_2 \quad , \tag{15}$$

其中，$n=0,1,2,\cdots,N-2$。引入矢量 $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$，式 (15) 可以被改写为回归方程的形式：

$$\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X}_1\beta_1-\boldsymbol{X}_2\beta_2=\boldsymbol{\varepsilon}+\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\beta_2 \quad . \tag{16}$$

考虑到序列 $\Pi_{\rm mer}(t_n)$ 的一阶自相关函数为零，因此 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\rm H}\tilde{\varepsilon}=0$ 成立 (上标 H 代表矢量的共轭转置)，可以获得残差平方和的解析表达式：

$$||\boldsymbol{\varepsilon}||^2=\frac{||\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X}_1\beta_1-\boldsymbol{X}_2\beta_2||^2}{1+\beta_2^{\rm H}\beta_2} \quad , \tag{17}$$

其中，$||\cdot||$ 代表矢量的二范数。为了求解 β_1，可以将式 (17) 转化为约束优化问题，即：

$$\min_{\beta_1,\beta_2}||\boldsymbol{\varepsilon}||^2 \quad , \quad {\rm s.t.}\beta_2=\beta_1^2 \quad . \tag{18}$$

使用拉格朗日乘子法求解，定义拉格朗日函数 $L(\beta_1,\beta_2,\lambda)$ 为：

$$L(\beta_1,\beta_2,\lambda)=||\boldsymbol{\varepsilon}||^2-\lambda(\beta_2-\beta_1^2) \quad . \tag{19}$$

对 $L(\beta_1,\beta_2,\lambda)$ 求 3 个偏导数，令它们都为 0，再消去 λ 可得：

$$(\boldsymbol{Y}-\beta_1\boldsymbol{X}_1-\beta_1^2\boldsymbol{X}_2)^{\rm H}[2\beta_1(\boldsymbol{X}_2+\bar{\beta}_1^2\boldsymbol{Y})+(1-|\beta_1|^4)\boldsymbol{X}_1]=0 \quad . \tag{20}$$

将等式 (20) 的左边记为 $f(\beta)$，只需求出 $f(\beta)$ 的零点即可。采用数值分析中的双点割线法迭代求解，迭代格式如下：

$$\beta^{k+1}=\beta^k-\left[\frac{f(\beta^k)-f(\beta^{k-1})}{2}\left(\frac{1}{{\rm Re}(\beta^k-\beta^{k-1})}-\frac{\rm i}{{\rm Im}(\beta^k-\beta^{k-1})}\right)\right]^{-1}f(\beta^k) \quad , \tag{21}$$

其中，$\mathrm{Re}(\cdot)$ 和 $\mathrm{Im}(\cdot)$ 分别代表取虚数的实部和虚部。此时，只需给定初值 $\beta^0 = \exp\left[-\frac{\mathrm{i}\pi\delta t}{T_\mathrm{c}}\left(1+\frac{\mathrm{i}}{2Q_\mathrm{c}}\right)\right]$，$\beta^1 = \beta^0 + \epsilon$，其中 ϵ 是一个比较小的复随机数，将 β^0 和 β^1 代入式 (21)，反复迭代多次，如果 β^{k+1} 与 β^k 的差距小于某一阈值 (这里取为 10^{-15})，则跳出循环并认为 $\hat{\beta} = \beta^{k+1}$，根据 $\hat{\beta}$ 就可以求出 $\hat{T}_\mathrm{c}$ 和 $\hat{Q}_\mathrm{c}$。

总之，该方法采用了一种机制明确的算法来直接获得最优的 $\hat{T}_\mathrm{c}$ 和 $\hat{Q}_\mathrm{c}$，而不用在某个特定区域内比较每个网格点上的结果，例如 Nastula 和 Gross[16] 采取的方法 (下面将其简称为网格搜索法)，因此本方法具有更高的计算效率。

3.2　区间估计的方法——自助法

目前关于钱德勒摆动周期和品质因子的区间估计都是基于蒙特卡洛方法开展的[16,25]，这种方法需要事先获取模型误差 $\Pi_\mathrm{mer}(t)$ 的理论分布。根据式 (12) 可知：$\Pi_\mathrm{res}(t)$ 是未知的或不可观测的，假设它服从任何一种分布可能都不合理；此外，随着观测水平的提高，观测数据的测量精度也在逐渐提高，因此观测误差 $\Pi_\mathrm{err}(t)$ 具有异方差性。综合这两个因素可以发现，理论模型难以描述 $\Pi_\mathrm{mer}(t)$ 的分布函数，因此蒙特卡洛方法的区间估计结果可能不够精确。

基于此，本工作采用自助法 (Bootstrapping) 做区间估计，该方法的优势是不需要知道 $\Pi_\mathrm{mer}(t)$ 的分布函数。自助法是一种现代的非参数统计方法，最早由 Efron[32] 提出，经过近几十年的发展，它已经具备了扎实的理论背景并拥有广泛的应用范围[33]。自助法的操作流程简捷，具体为：(1) 将包含 K 个样品的初始数据集当做总体，每次从中有放回地抽取 K 个样品，如此重复 B 次，就得到了 B 个新样本；(2) 对每个再抽样的样本分别做参数估计，可以得到每个参数的 B 个估值；(3) 基于这 B 组估值，可以给出基于初始数据集的区间估计，甚至研究参数估值的有效性。

本工作采用自助法来对 T_c 和 Q_c 进行区间估计，按照以上步骤将式 (15) 中的 $N-1$ 个方程当成总体 (这一做法在参考文献 [33] 中有详细的描述)，每次从中有放回地抽取 $N-1$ 个样品，然后根据式 (16)—(21) 对再抽样的样本做参数估计，如此重复多次，可以获取多组 T_c 和 Q_c 的参数估值，据此给出 T_c 和 Q_c 的区间估计结果。

4　数据及预处理

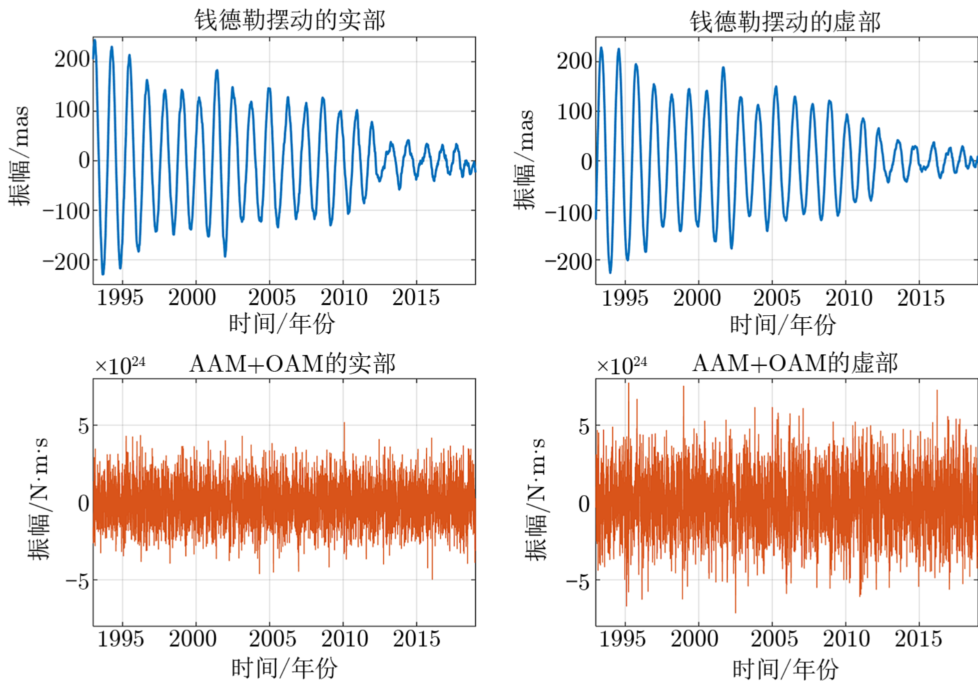
对于极移观测序列，我们采用 Ratcliff 和 Gross[34] 解算的 COMB2018 数据集，该数据集在 1990 年后的时间段具有非常高的精度。大气角动量 (atmospheric angular momentum, AAM) 数据来自美国国家环境预报中心/大气研究中心 (National Centers for Environmental Prediction / National Center for Atmospheric Research, NCEP / NCAR) 数据集[35]，该数据集考虑了地形因素的影响，精度更高[36]。海洋角动量 (oceanic angular momentum, OAM) 数据来自 IERS 特殊海洋局 (Special Bureau for Ocean) 的 ECCO-kf080i 数据集。这三个数据集的采样间隔都是 1 d，选取的公共时间跨度为 1993/01—2018/12。在参数估计之前，对

这些数据做如下预处理[16,25]：

(1) 扣除三个序列中的周年项、季节项和线性趋势项。采用最小二乘法从原始序列中扣除频率为 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 cpy 的谐波信号，两个周期分别为 13.661 d 和 13.633 d 的潮汐项，一个一阶多项式函数。

(2) 扣除低频项。除线性趋势项外，极移序列中的低频信号一般被认为来自地球内部，而这些激发源不能被直接观测，据此设计一个高通滤波器，过滤掉三个序列中周期大于 2 a 的频段。

预处理后的数据展示在图 1 中，从该图可以看出：钱德勒摆动的振幅一直处于调制中，总体在减小，而在 2010－2019 年期间，钱德勒摆动的振幅已经减小到非常显著的程度 (这也可以在 Wang 等人[37]的图 8 中得到验证)；对于预处理后的角动量序列，与平稳随机噪声非常相似，并且实部振幅比虚部振幅稍小。



注：第一行是预处理后的极移序列 p 中的 Chandler 项，第二行是预处理后的角动量序列 $\varPi_{\rm obv}$，是大气角动量 (AAM) 和海洋角动量 (OAM) 加和后的结果。

图 1 预处理后的数据序列图

5 结 果

为了更全面地评估新方法的稳定性和可靠性，本工作选用三个不同的时间段对研究结果进行分析和讨论，分别是 1993－2010 年、2000－2019 年和 1993－2019 年。在每个时间

段都使用自助法做 1 000 次再抽样，每个时间段都得到 1 000 组 $\hat{T}_c$ 和 $\hat{Q}_c$。这 3 000 组估计值的统计直方图如图 2 所示，它们的均值、方差和 90% 置信区间如表 2 所示。

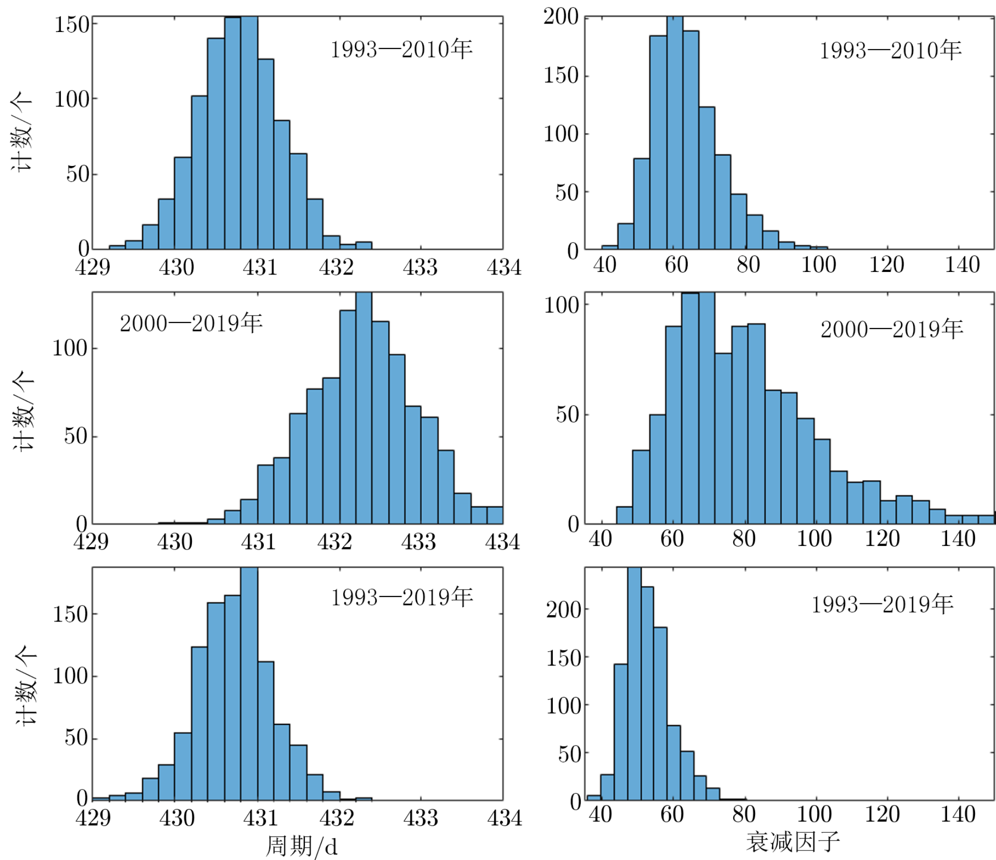


图 2　3 000 组周期和品质因子的参数估计值的统计直方图

表 2　3 000 组周期和品质因子的参数估计的均值、方差和 90% 置信区间

时间段	周期/d			品质因子		
	点估计	标准差	90%置信区间	点估计	标准差	90%置信区间
1993－2010 年	430.8	0.50	(430.0, 431.6)	62.6	9.63	(43.5, 75.7)
2000－2019 年	432.2	0.68	(431.1, 433.3)	76.2	25.4	(24.3, 97.7)
1993－2019 年	430.7	0.46	(429.9, 431.5)	52.5	6.56	(40.3 60.8)

从图 2 和表 2 的统计结果可以看出，第一个时间段 (1993－2010 年) 和第三个时间段 (1993－2019 年) 给出的 T_c 和 Q_c 的区间估计几乎是重合的，并且 $\hat{T}_c$ 的方差很小；对于 Q_c 的估计，其对数据的选择比较敏感，这也是现有估计方法共同的问题 (如表 1 所示)。对比表 1 和表 2 可以看出，新方法对 Q_c 的估计具有更小的方差，显示了更优的统计有效性。

从图 2 和表 2 的统计结果还可以发现，第二个时间段 (2000－2019 年) 与其他两个时间段的参数估计结果差距较大。这可能与近年来钱德勒摆动的振幅逐渐减小有关，该时间段的估计结果可能具有一定的系统性偏差，我们将在未来的研究中进一步探讨。

综合以上结果，可以确定第一个时间段 (1993－2010 年) 的参数估计更加合理，即 T_c 和 Q_c 的点估计为 430.8 d 和 62.6，两者的 90% 置信区间分别为 (430.0, 431.6) d 和 (43.5, 75.7)。在该时间段内的参数置信区间更宽，具有更大的概率包含 Q_c 的真值，是一个比较保守的估计。此外，这一结果与 Mathews 等人[5] 及 Nastula 和 Gross[16] 的结果很接近，再一次验证了新方法的可靠性。

6 总结与讨论

本文从经典的极移理论出发，给出了一种用于估计钱德勒摆动周期和品质因子的新方法。新方法对于误差的假设较弱，并采用更加合理的自助法进行区间估计，参数估计的结果具有更优的统计性质。此外，新的点估计算法采用了机制明确的双点割线法来直接获取最优解，与传统的网格搜索法相比具有更高的计算效率。

对地球钱德勒摆动周期和品质因子的最优点估计结果分别为：430.8 d 和 62.6，两者的标准差为 0.50 d 和 9.63，最优的区间估计分别为 (430.0, 431.6) d 和 (43.5, 75.7)。这一结果与 Mathews 等人[5] 及 Nastula 和 Gross[16] 的结果很接近，且我们的参数估值具有更小的方差，再次验证了新方法的可靠性和优越性。

由于目前只采用了大气和海洋的角动量数据，对地球钱德勒摆动周期和品质因子的最优估计可能还存在一定偏差。未来我们将考虑陆地水或全球水文角动量的影响，进一步提高钱德勒摆动周期和品质因子的估计精度。此外，随着对钱德勒摆动认识的逐步提高以及观测数据的精度提升，本工作提出的新方法将对地球钱德勒摆动的精准预报提供可能。

致谢

感谢两位审稿人对本文的肯定，他们提出的意见和建议也十分宝贵，这大大提高了文章的质量和可读性。与上海天文台廖新浩老师的交流讨论让我们受益匪浅，感谢廖老师在这个过程中提出的建设性意见，这促使新方法改进得更加完善。

参考文献：

[1] Smith M L, Dahlen F A. Geophys J Int, 1981, 64: 223
[2] 朱耀仲. 中国科学, 1991, B 辑: 1335
[3] 朱耀仲. 天文学报, 1992, 33: 420
[4] 朱耀仲. 地球物理学进展, 1993, 8: 43
[5] Mathews P M, Herring T A, Buffett B A. JGR, 2002, 107: ETG 3-1
[6] Chen W, Ray J, Li J C, et al. JGR, 2013, 118: 4975

[7] Chen W, Ray J, Shen W, et al. JGR, 2013, 118: 4995
[8] Wahr J M. Geophys J Int, 1982, 70: 349
[9] Eubanks T M. Adv Space Res, 1993, 13: 291
[10] Barnes R T H, Hide R, White A A, et al. Math Phys Sci, 1983, 387: 31
[11] Gross R S. Geophys Res Lett, 2000, 27: 2329
[12] Gross R S. Treatise on Geophysics. 2nd Edition, Schubert G, ed. Oxford: Elsevier. 2015: 215
[13] Liao D, Liao X, Zhou Y. Geophys J Int, 2003, 152: 215
[14] Fang M, Liao X H, Xu X Q. Ann Phys-Berlin, 2020, 20: 262
[15] Chen J L, Wilson C R, Tapley B D. J Geod, 2005, 78: 535
[16] Nastula J, Gross R. JGR, 2015, 120: 4474
[17] Liu L T, Hsu H T, Gao B X, et al. Geophys Res Lett, 2000, 27: 3001
[18] Liao D C, Zhou Y H. Chinese J Astron Ast, 2004, 4: 247
[19] Gibert D, Le Mouël J L. JGR, 2008, 113: 405
[20] Jeffreys H. MNRAS, 1968, 141: 255
[21] Ooe M. Geophys J Int, 1978, 53: 445
[22] Wilson C R, Vicente R O. Geophys J Int, 1980, 62: 605
[23] Wilson C R, Vicente R O. Geophys Monogr Ser, 1990, 59: 151
[24] Vicente R O, Wilson C R. JGR, 1997, 102: 20439
[25] Furuya M, Chao B F. Geophys J Int, 1996, 127: 693
[26] Kuehne J, Wilson C R, Johnson S. JGR, 1996, 101: 13573
[27] Gross R S. Forcing of polar motion in the Chandler frequency band: A contribution to understanding interannual climate variations. Plag H P, Chao B F, Gross R S, et al, eds. Luxembourg: Cahiers du Centre Européen de Géodynamique et de Séismologie, 2005, 24: 31
[28] Seitz F, Kirschner S, Neubersch D. JGR, 2012, 117: 1
[29] Chen W, Shen W B. JGR, 2010, 115: 419
[30] Dobslaw H, Dill R. Effective Angular Momentum Functions From Earth System Modelling at GeoForschungsZentrum in Potsdam. ftp://esmdata.gfz-potsdam.de/EAM, 2019
[31] Gross R S. Geophys J Int, 1992, 109: 162
[32] Efron B. Ann Stat, 1979, 7: 1
[33] Montgomery D C, Peck E A, Vining G G. Introduction to linear regression analysis. 5th Edition, Hoboken: John Wiley & Sons, Inc. 2012: 517
[34] Ratcliff J T, Gross R S. Combinations of Earth Orientation Measurements: SPACE2018, COMB2018, and POLE2018. https://keof.jpl.nasa.gov/combinations/2018/SpaceCombPole2018.pdf, 2019
[35] Salstein D A, Kann D M, Miller A J, et al. B Am Meteorol Soc, 1993, 74: 67
[36] Zhou Y H, Salstein D A, Chen J L. JGR, 2006, 111: 1
[37] Wang G C, Liu L T, Su X Q, et al. Surv Geopyhs, 2016, 37: 1075

A new Estimation Method of Chandler Wobble

XU Can-can[1,3], FANG Ming[2], XU Xue-qing[1,4],
ZHOU Yong-hong[1,3,4], DUAN Peng-shuo[1,4]

(1. Shanghai Astronomical Observatory, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 200030, China; 2. Department of Earth, Atmospheric, and Planetary Sciences, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge 02139, USA; 3. School of Astronomy and space Science, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China; 4. Key Laboratory of Planetary Sciences, Chinese Academy of Sciences,

Shanghai 200030, China)

Abstract: Based on the classic polar-motion theory, we establish a new method contains mathematical model and fast algorithm, to estimate the period and Q Value of the Earth's Chandler wobble. This method makes weak assumptions on the model error, and the estimated results have better statistical properties. Given the polar-motion, atmospheric and oceanic angular momentum observations during 1993/01—2009/12, we apply the new method to estimate the Chandler wobble's period and Q value, the preferred point estimations are 430.8(±0.50) solar days and 62.64(±9.63) in respective, which are close to the latest research results. Moreover, the 90% confidence interval results are (430.0, 431.6) solar days and (43.50, 75.66) respectively, such a extremely narrow confidence interval can increase the reliability of the point estimations, which is helpful for understanding of the excitation and maintenance mechanism of the Chandler wobble more precisely.

Key words: Earth's rotation variation; polar-motion theory; angular momentum; optimization algorithm; bootstrapping